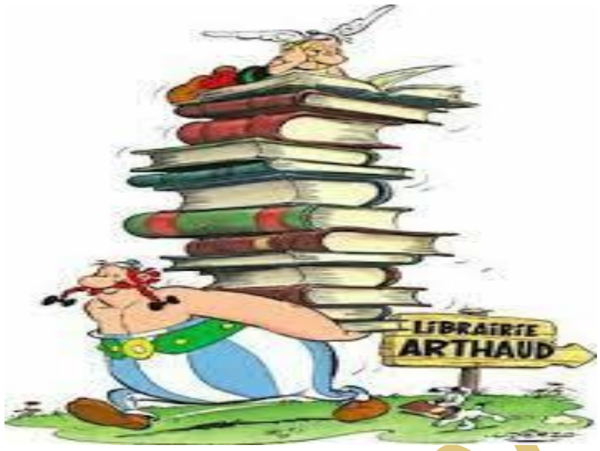
Γεωμετρικές Ακροβασίες Οι λύσεις των θεμάτων



ΘΕΜΑ 1ο

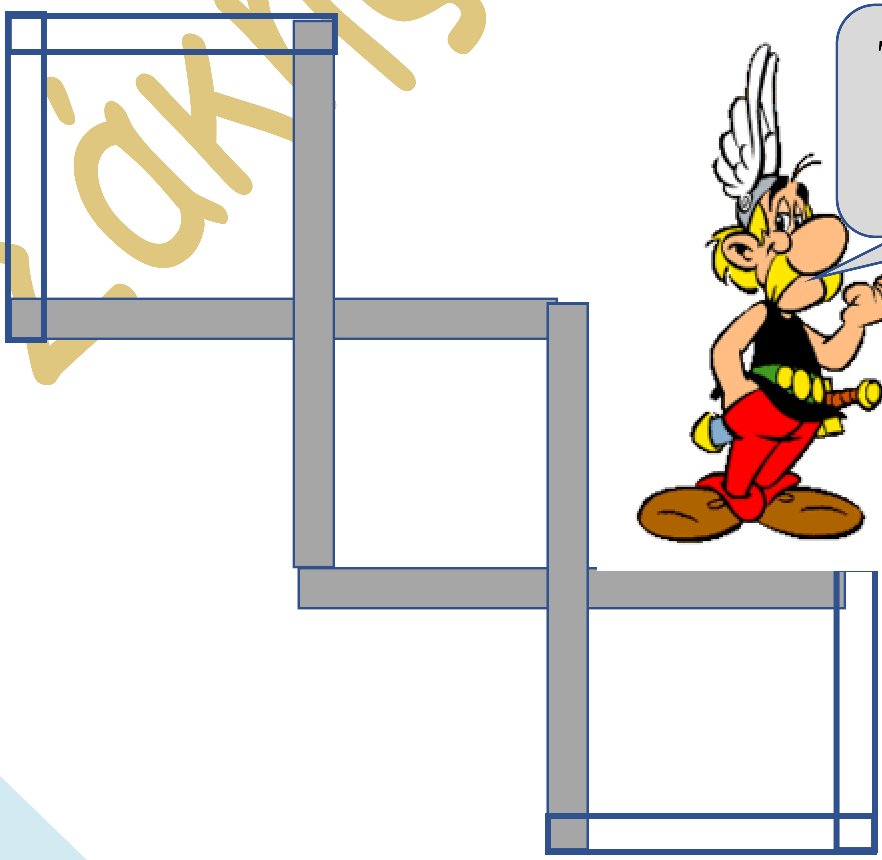
Αξιοποιούμε τα στοιχεία που δίνονται: $\widehat{\Gamma B H} = 50^o$. Αυτή η γωνία είναι «εγκλωβισμένη» στο τρίγωνο ΒΕΓ , που είναι κάτι συγκεκριμένο; Βέβαια ισοσκελές , εφόσον οι πλευρές του ΒΓ και ΒΕ είναι ίσες (οι πλευρές των ίσων τετραγώνων). Γνωρίζοντας τη γωνία $\widehat{\Gamma B E} = 50^O + 90^o = 140^o$ του ι-σοσκελούς τριγώνου , βρίσκουμε τις άλλες δύο (ίσες) γωνίες του:

$\widehat{\Gamma B E} + \widehat{B\Gamma E} + \widehat{BE\Gamma} = 180^o$ ή $2\widehat{BE\Gamma} + 140^O = 180^O$ δηλαδή $2\widehat{BE\Gamma} = 180^O - 140^o$, οπότε $2\widehat{BE\Gamma} = 40^O$, άρα $\widehat{BE\Gamma} = 20^O$.

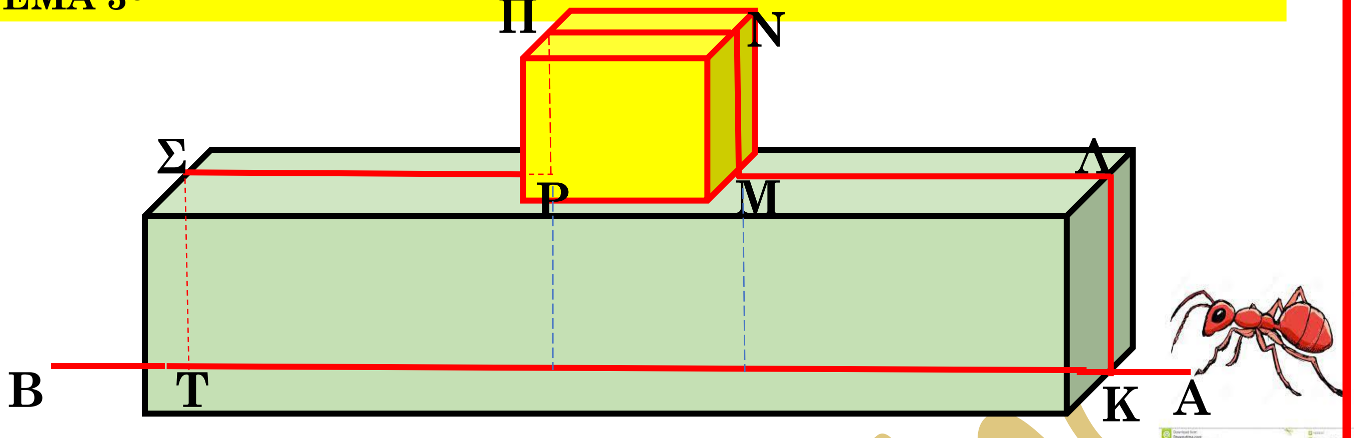
$$\widehat{BE\Gamma} + \widehat{\omega} = 90^O \text{ ή } 20^O + \widehat{\omega} = 90^O, \text{έτσι } \boldsymbol{\widehat{\omega} = 70^O}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Η τοποθέτηση μπορεί να γίνει με τον παρακάτω τρόπο:



ΘΕΜΑ 3ο

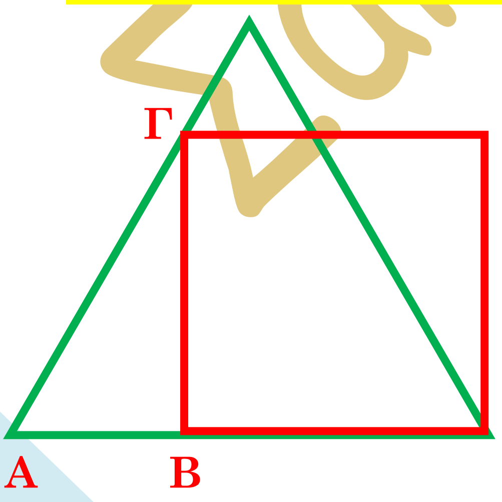


Η διαδρομή που θα ακολουθήσε το μυρμήγκι μετά την τοποθέτηση των κουτιών είναι η $AK \to K\Lambda \to \Lambda M \to MN \to N\Pi \to \Pi P \to P\Sigma \to \Sigma T \to TB$. Το μήκος της διαδρομής θα προκύψει με την πρόσθεση όλων των προηγούμενων τμημάτων.Τα ύψη των δύο κουτιών είναι γνωστά, ένα μέτρο το κάθε ένα, δηλα-δή ΚΛ=ΜΝ=ΠΡ=ΣΤ=1m.
Τι γίνεται όμως με την υπόλοιπη διαδρομή;
Βλέπουμε ότι το άθροισμα ΜΛ+ΠΝ+ΣΡ=ΚΤ, ενώ η αρχική γνωστή διαδρομή είναι η ΑΒ=ΒΤ+ΤΚ+ΚΑ=5m.
Έτσι, η διαδρομή παράκαμψης των κουτιών θα είναι:
$AK + K\Lambda + \Lambda M + MN + N\Pi + \Pi P + P\Sigma + \Sigma T + TB$=(αλλάζουμε τη σειρά)=

$$=TB+\underbrace{M\Lambda+\Pi N+\Sigma P}_{KT}+AK+K\Lambda+MN+\Pi P+\Sigma T=T\underbrace{B+KT+KA}_{5m}+1m+1m+1m+1m$$

Δηλαδή 5m+4m=9m.

ΘΕΜΑ 4ο



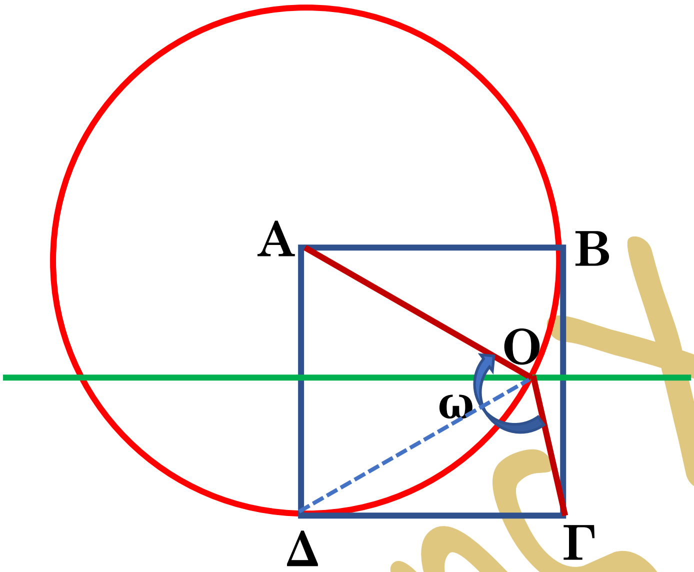
Ο Αστερίξ ,ξέρουμε, ότι περπατάει περιμετρικά του τετραγώνου, διανύοντας από-σταση 4m , οπότε κάθε πλευρά του τετραγώ-νου είναι 1m.
Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, έτσι όλες οι γωνίες του είναι 60^{o}.
Η παρουσία γνωστής γωνίας σε ορθογώνιο τρί-γωνο , μας προσανατολίζει στη χρήση τριγωνο-μετρίας:

$$\varepsilon\varphi \mathrm{A}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}}\Rightarrow \varepsilon\varphi 60^o=\frac{1m}{AB}\Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{1m}{AB}\Leftrightarrow \sqrt{3}AB=1m\Leftrightarrow AB=\frac{1}{\sqrt{3}}m=\frac{\sqrt{3}}{3}m$$

Έτσι, βρίσκουμε και την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (σε m).

Ο Οβελίξ, διαγράφοντας την περίμετρο του ισόπλευρου τριγώνου ,θα διανύσει απόσταση $3\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=3+\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 5ο

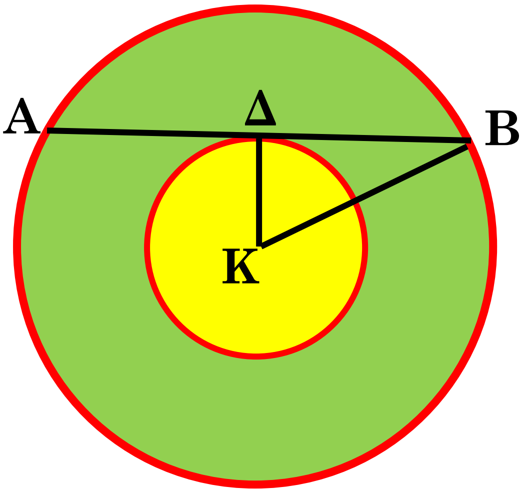


Φέρνουμε την ΟΔ.
Η πράσινη ευθεία είναι μεσοκάθετος του ΑΔ, έτσι, κάθε σημείο της ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή ΟΑ=ΟΔ
Οι ΟΑ, ΑΔ είναι ακτίνες του κύκλου οπότε είναι ίσες.
Τελικά ΟΑ=ΟΔ=ΑΔ , άρα το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο και έτσι , κάθε μία γωνία του 60°.
Η ζητούμενη γωνία ω αποτελείται από τις επιμέρους γωνίες $\widehat{AO\Delta}=60^o$ και $\widehat{\Delta O\Gamma}$, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε, δουλεύοντας στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΟΓ (είναι ΟΔ=ΑΔ=ΔΓ). Η $\widehat{O\Delta\Gamma}=90^o-60^o=30^o$.Οπότε οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ΔΟΓ θα είναι από 75°.

Η γωνία ω=75°+60°=135°.

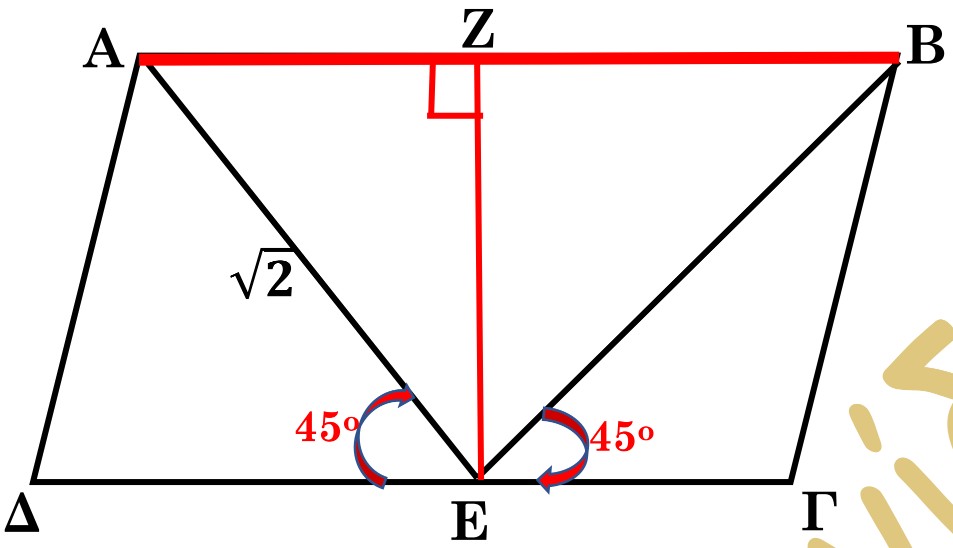
ΘΕΜΑ 6

Για να βρούμε το εμβαδόν του πράσινου δακτυλίου, αρκεί από το εμβαδόν του μεγάλου κυκλικού δίσκου, να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του μικρού.



Το εμβαδόν του πράσινου δακτυλίου είναι:
$E_{\delta\alpha\kappa\tau\upsilon\lambda\iota o\upsilon} = \pi \cdot \text{KB}^2 - \pi \cdot \text{K}\Delta^2 = \pi \cdot \left(\text{KB}^2 - \text{K}\Delta^2\right)$.
Η διαφορά των τετραγώνων στην παρένθεση « μυρίζει» πυθαγόρειο θεώρημα.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΒ , θα έχουμε:
$\text{KB}^2 = \text{K}\Delta^2 + \Delta\text{B}^2 \Leftrightarrow \text{KB}^2 - \text{K}\Delta^2 = \Delta\text{B}^2$.
Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές, οπότε το ύψος του ΚΔ από την κορυφή του, θα είναι και διάμεσος του. Έτσι, ΒΔ=8m.
$\text{KB}^2 - \text{K}\Delta^2 = 8^2 \Leftrightarrow KB^2 - K\Delta^2 = 64$.
Τελικά, είναι:
$E_{\delta\alpha\kappa\tau\upsilon\lambda\iota o\upsilon} = \pi \cdot \left(\text{KB}^2 - \text{K}\Delta^2\right) = \pi \cdot 64m^2$

ΘΕΜΑ 7



Από τις δοσμένες γωνίες , βρίσκουμε ότι η $\widehat{AEB} = 90^{o}$,οπότε το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. Επίσης, $\widehat{AE\Delta} = \widehat{EAB}$ ως εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΔΓ με τέμνουσα την ΑΕ, όπως και $\widehat{BE\Gamma} = \widehat{ABE}$ εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΔΓ με τέμνουσα την ΒΕ.

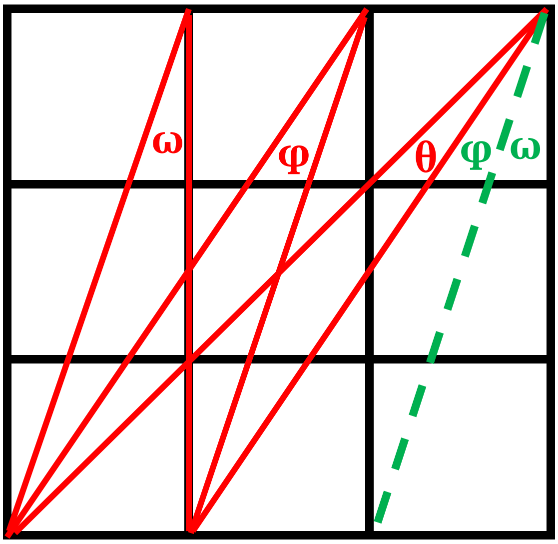
Έτσι, το τρίγωνο ΑΕΒ είναι και ισοσκελές με ίσες πλευρές $AE = EB = \sqrt{2}$,

ενώ το εμβαδόν του είναι $(\mathrm{AEB}) = \dfrac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1.$

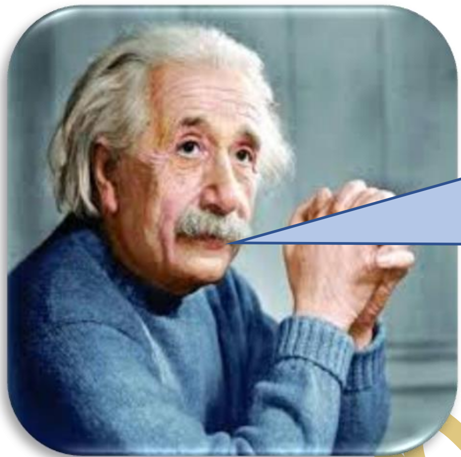
$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{EZ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{EZ}}{2} = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AEB}) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση: Σε πολλές περιπτώσεις , το ζητούμενο δεν προκύπτει άμεσα , αλλά βρίσκεται «υποβοηθούμενο» άλλων στοιχείων που συνάγουμε από τα δεδομένα.

ΘΕΜΑ 8



Η βασική ιδέα είναι η «μεταφορά» των εμπλεκόμενων γωνιών σε άλλες θέσεις που θα μας δώσουν και την απάντηση.
Έτσι η γωνία ω είναι ίση με την πράσινη γωνία ω, η κόκκινη φ ίση με την πράσινη φ, ενώ δεν πειράζουμε τη γωνία θ. Στην νέα θέση τους , το άθροισμα των γωνιών ,βλέπουμε ότι είναι 45^o.

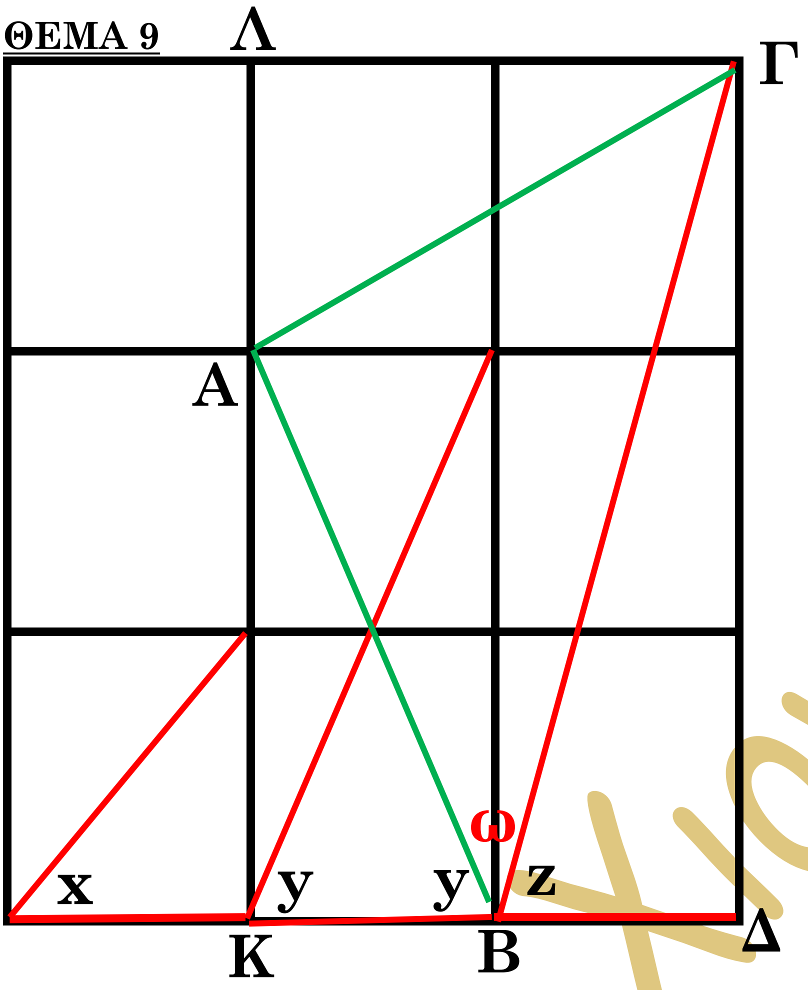


Θυσιάσαμε την Μαθηματική αυστηρότητα στους παραπάνω συλλογισμούς, για να χαρούμε την ομορφιά και αμεσότητα κάποιων κινήσεων που μας βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων

<u>Για τους δύσπιστους</u>

Η κόκκινη και η πράσινη γωνία ω, όπως και οι αντίστοιχες κόκκινες και πράσινες φ, είναι ίσες γιατί έχουν τις πλευρές τους παράλληλες και είναι και οξείες.
Και γιατί είναι παράλληλες; Επειδή έχουμε πολλά παραλληλόγραμμα. Μπορείς να τα εντοπίσεις εύκολα.
Αν πάλι δεν πειστήκατε , δοκιμάστε να δείξετε ότι δύο γωνίες οξείες που έχουν ανά δύο τις πλευρές τους παράλληλες, είναι ίσες (οι εντός εναλλάξ γωνίες θα σας βοηθήσουν).

ΘΕΜΑ 9



Η γωνία x είναι, βέβαια 45^o. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ι-σοσκελές γιατί:

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΛΓ,έχου-με:

$$A\Gamma^2 = A\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2 =$$

$$= 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΚΒ, έ-χουμε:

$$AB^2 = AK^2 + KB^2 =$$

$$= 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΒΓΔ, έ-χουμε:

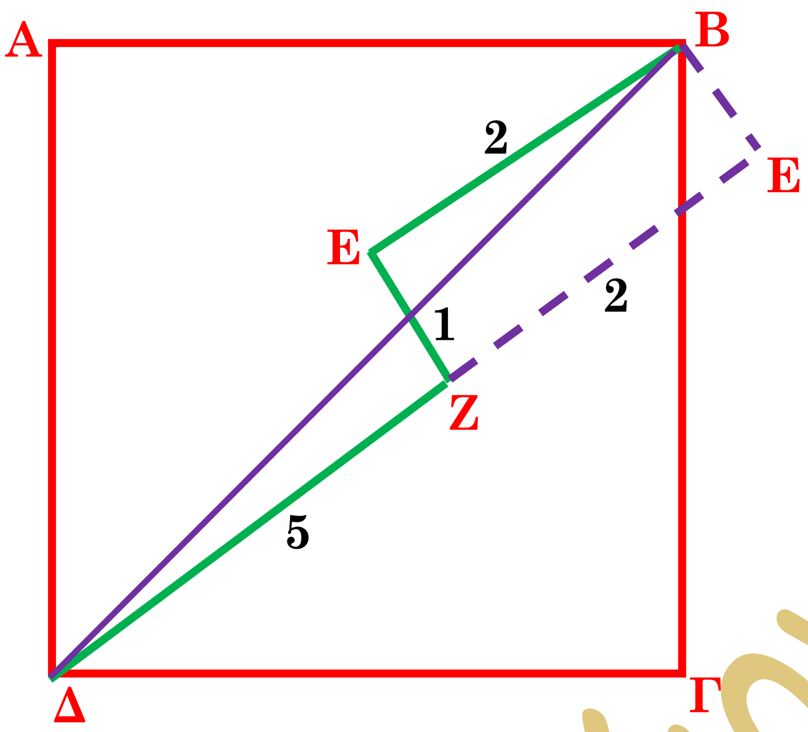
$$B\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 =$$

$$= 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$$

Δηλαδή , $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$ και από το αντίστροφο του πυθαγόρειου θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και επειδή $A\Gamma^2 = AB^2 = 5$ είναι και ισοσκελές. Έτσι ,οι γωνίες του $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = 45^o$.

Όμως $y+z+\omega=180^o$, οπότε $y+z+45^o=180^o$, δηλαδή $y+z+x=180^o$.

ΘΕΜΑ 10



Προεκτείνουμε τη ΔΖ κατάλληλα, σχηματίζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΕ.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα σε αυτό,έχουμε:

$$B\Delta^2 = \Delta E^2 + EB^2 = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$$

Έτσι, πάλι από το πυθαγόρειο στο ορθογώνιο ΒΔΓ, τελικά έχουμε:

$$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + \Gamma B^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow 50 = 2\Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma^2 = 25 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 5.$$